Concavity of Certain Maps on Matrix Spaces (作用素論とその応用)

安藤, 毅

数理解析研究所講究録
338巻 1978年 77-83

Concavity of Certain Maps on Matrix Spaces

北大 応用電気研 安藤 毅

<u>1. 序.</u> n次の Hermite 行列の空間 H_n には positive semidefinite 性をもとにして自然な順序が入る; $A \geqq B$ とは $A-B$ が positive semi-definite のことである. したがって行列空間での写像に関して, その convex 性また concave 性を問題にすることが出来る. 例えば $H_\ell \times H_m$ の凸部分集合から H_n への写像Φが convex であるとは

$$\Phi(\lambda A_1+(1-\lambda)A_2,\ \lambda B_1+(1-\lambda)B_2)$$
$$\leqq \quad \lambda\Phi(A_1,B_1) \quad + (1-\lambda)\Phi(A_2,B_2) \qquad (0<\lambda<1)$$

以下の研究は Lieb [3] により証明された定理;

$(A,B) \longmapsto A^{1-p}\otimes B^{p} \quad (0<p<1)$ は $A\geqq 0, B\geqq 0$ で concave, に触発され, 更に一般な concavity 定理を確立することを目標とした. 応用として行列 $A=(a_{ij})$ $B=(b_{ij})$ の Hadamard 積 $A*B=(a_{ij}b_{ij})$ に対する種々の上, 下からの評価が出る. 詳細は Lin. Alg. Appl. に出版予定.

2. 基本的演算　以下 n 次の positive definite 行列の全体を H_n^+ とかく.

定理 1　$A, B \in H_n^+$ のとき

$$BA^{-1}B = \text{minimum}\left\{C \geqq 0 : \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \geqq 0\right\}$$

となり, したがって写像 $(A,B) \longmapsto BA^{-1}B$ は Convex.

これから直ちに Anderson-Duffin [1] の定理

$$(A,B) \longmapsto A!B \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{\tfrac{1}{2}(A^{-1}+B^{-1})\right\}^{-1} \quad \text{Concave}$$

が出る. 実際, $A!B = 2\{B - B(A+B)^{-1}B\}$ である.

定理 2. (Pusz-Woronowicz [4])　$A, B \in H_n^+$ のとき

$$A\#B \overset{\text{def}}{=\!=} A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$

$$= \text{maximum}\left\{C \geqq 0 ; \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \geqq 0\right\}$$

となり, したがって写像 $(A,B) \longmapsto A\#B$ は concave.

ここで maximum の存在は写像 $A \longmapsto A^{\frac{1}{2}}$ が H_n^+ で順序を保存することから出る.

$A!B$, $A\#B$ はそれぞれ A, B の調和平均, 幾何平均と考えられるもので, A と B が可換なら $A\#B = (AB)^{\frac{1}{2}}$ である. 一般に次の算術－幾何－調和平均不等式が成立つ.

$$\tfrac{1}{2}(A+B) \geqq A \# B \geqq A ! B.$$

これ等の演算が $H_n \longmapsto H_m$ の positive linear map Φ で filtre をかけられたときどうなるを見ると、よく知られた Kadison の不等式（例えば [2]）を使うと

$$\Phi(A \# B) \leqq \Phi(A) \# \Phi(B), \quad \Phi(A ! B) \leqq \Phi(A) ! \Phi(B)$$

が出る。この不等式から容易に写像 $H_n^+ \ni A \longmapsto \Phi(A^{-1})^{-1}$ の concavity が導かれる。

3. Operator-monotone 函数. Hermite 行列から新らしい Hermite 行列を生み出す一つの方法は functional calculus である。$f(\lambda)$ が $(0, \infty)$ 上の実数値連続函数のとき f の A による値を $f[A]$ とかこう。$f(\lambda)$ が順序を保存するとき、すなわち $A \leqq B \Rightarrow f[A] \leqq f[B]$ の性質をもつとき operator-monotone と呼ぶ。よく知られた Löwner の定理（[2] を見よ）によれば $f(\lambda)$ が operator-monotone である必充條件は、$\alpha \in R$, $\beta \geqq 0$ と $(-\infty, 0]$ 上の正測度 $\mu(\cdot)$ を使って

$$f(\lambda) = \alpha + \beta\lambda + \int_{-\infty}^{0} \frac{1+\lambda t}{t-\lambda} \, d\mu(t)$$

と積分表示をもつことである。$f(\lambda) \geqq 0$ のときは

$$f(\lambda) = \gamma + \beta\lambda + \int_{0}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda + t} \, d\nu(t)$$

の形にかける，但し $\gamma, \beta \geqq 0$． $\nu(\cdot)$ は $[0,\infty)$ の正測度．最も重要な operator-monotone 函数としては $\log\lambda$, λ^p $(0 < p \leqq 1)$ がある。

上の積分表示と定理１を使うと次の定理が容易に出る．

<u>定理3.</u> $f(\lambda)$ が operator-monotone のとき H_n^+ からの写像 $A \longmapsto f[A]$ は concave，しかし $A \longmapsto A\cdot f[A]$ は convex.

$H_n \longmapsto H_m$ の positive linear map Φ で，$\Phi(I_n) = I_m$ なるものを使って filtre をかけると

$$\Phi(f[A]) \leqq f[\Phi(A)]$$

となる．

<u>4. Tensor 積</u>。 2つの Hermite 行列 A, B の tensor 積 $A \otimes B$ はまた Hermite 行列になり，A, B が positive definite なら $A \otimes B$ も positive definite になる． tensor 積の演算と＃演算の可換性と，算術－幾何平均不等式を使うと容易に次がでる．

<u>定理4.</u> Φ, Ψ が共に $H_n^+ \longmapsto H_m^+$ の concave 写像なら，写像 $(A,B) \longmapsto \Phi(A)^{-1} \otimes \Psi(B)^{-1}$ は convex.

これから直ちに Lieb の定理[3]; $0<p, q\leq 1$ のとき写像 $(A,B)\longmapsto A^{-p}\otimes B^{-q}$ は convex, が出る。

定理 1 を少し改良すれば、Φ, Ψ が共に $H_n^+\longmapsto H_m^+$ の concave 写像であれば $(A,B)\longmapsto \Phi(A)!\Psi(B)$ も concave 写像になることがわかるから、§3 の積分表示と結びつけると次の二つの主要定理が出る。

<u>定理 5.</u> $f(\lambda)\geq 0$ が operator-monotone で Φ, Ψ が共に $H_n^+\longmapsto H_m^+$ の concave 写像のとき

$$(A,B)\longmapsto f[\Phi(A)^{-1}\otimes\Psi(B)]\cdot(\Phi(A)\otimes I_m)$$

も concave な写像になる。

<u>定理 6.</u> $f(\lambda)$ が operator-monotone, Φ が affine Ψ が concave 写像のとき

$$(A,B)\longmapsto f[\Phi(A)\otimes\Psi(B)^{-1}]\cdot(\Phi(A)\otimes I_m)$$

は convex な写像になる。

定理 5 からは $f(\lambda)=\lambda^p$ $(0<p<1)$ として序にのべた Lieb の定理が出る。また定理 6 からは次がでる

$$(A,B)\longmapsto A^{1+p}\otimes B^p \quad (0<p<1) \quad \text{convex.}$$

$$(A,B)\longmapsto (A\log A)\otimes I_m - A\otimes\log B \quad \text{convex.}$$

5. Hadamard 積. Tensor 積と並んで興味あるのは Hadamard 積である; $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\in H_n$ に対しその Hadamard 積 $A*B \overset{\text{def}}{=} (a_{ij}b_{ij})$. 重要なのは可換性 $A*B = B*A$ である. $A*B$ は tensor 積 $A\otimes B$ の主小行列になっている, この事は次のように表現すると使い良い; H_{n^2} から H_n への positive linear map Φ があり

$$\Phi(A\otimes B) = A*B \quad , \quad \Phi(I_{n^2}) = I_n .$$

このことから, 直ちに $A, B\in H_n^+$ なら $A*B\in H_n^+$ がでる. また前節の主定理を使うと, $H_n^+\times H_n^+$ からの写像として

$$(A, B) \longmapsto A^{1/p} * B^{1/q} \quad (1/p + 1/q = 1) \text{ は Concave},$$

$$(A, B) \longmapsto A^{-1/p} * B^{1/q} \quad (1/q - 1/p = 1,\ q \geq 1/2) \text{ は Convex}$$

等がでる, 例えば上の concavity は

$$\sum_{i=1}^{k}(A_i * B_i) \leq \Big\{\sum_{i=1}^{k} A_i^p\Big\}^{1/p} * \Big\{\sum_{i=1}^{k} B_i^q\Big\}^{1/q}$$

といった Hölder 型の不等式となる.

定理 7. $A, B\in H_n^+$ のとき

$$A*B \leq (A^p * I)^{1/p}(B^q * I)^{1/q} \qquad (1/p + 1/q = 1).$$

これには $C \overset{\text{def}}{=} (A^p * I)^{1/p}$, $D \overset{\text{def}}{=} (B^q * I)^{1/q}$ として上の concavity から出る不等式

$$A*B \leqslant \frac{d}{d\varepsilon}(C^p+\varepsilon A^p)^{1/p} * (D^q+\varepsilon B^q)^{1/q}\Big|_{\varepsilon=0}$$

の右辺を計算すればよい。 同様に上の Convexity から

<u>定理 8.</u> $A, B \in H_n^+$ のとき

$$A*B \geqslant (A^{-p}*I)^{-1/p} \cdot (B^q*I)^{1/q}. \quad (1/q-1/p=1,\ p\geqslant 1\geqslant q\geqslant 1/2)$$

$A*B$ が $A\otimes B$ から Φ を通して得られることを考えると, operator-monotone 函数 $f(\lambda)=\log\lambda$ を使って

<u>定理 9.</u> $\log[A*B] \geqslant (\log A + \log B)*I$.

したがって $A\in H_n^+$ のとき $A*A^{-1}\geqslant I$ がわかる.

<u>定理 10.</u> $A*B \geqslant (A\#B)*(A\#B)$.

これは Hadamard 積の可換性と Φ と演算 $\#$ の関連から容易にわかる.

<u>文 献</u>

1. W. N. Anderson - R. J. Duffin, J. Math. Anal. Appl. 26 (1969) 576-594
2. Ch. Davis, in Proc. Symp. Pure Math. 「Convexity」 Amer. Math. Soc. 1963
3. E. Lieb, Advance in Math. 11 (1973), 267-288
4. W. Pusz - S. L. Woronowicz, Rep. Math. Phys 8 (1975) 159-170